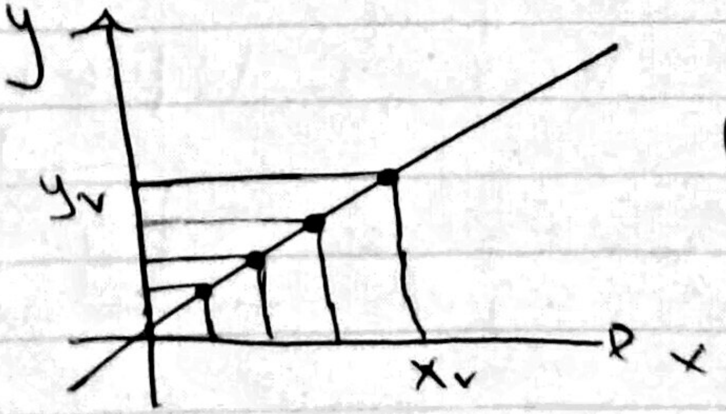
5/11/18

Συνέχεια...

6 Υπενθύμιση: $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) = \bar{x}_0$, $\quad \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n: \underbrace{x_\nu^{(i)}}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \underbrace{x_0^{(i)}}_{\in \mathbb{R}}$

Π.χ. $\boxed{n=2}$



$(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$

(7) Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει (δηλ. $\exists\, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$: $\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \bar{x}_0$) αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy (βασική ακολ.)

[λέγεται μία ακολ. $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N},\ \forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$, $\nu, \mu \geq 0$: $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$]

Αποδ. (Χρησιμοποιούμε την πληρότητα στο $\mathbb{R}$)
[Στο $\mathbb{R}$ μια συγκλ. ακολ. είναι Cauchy και το αντίστροφο]

($\Rightarrow$) $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \overset{ορσ}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0\ \forall \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 : \forall \nu, \mu \geq \nu_0$: $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| + \|\bar{x}_0 - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$

($\Leftarrow$): Έστω ότι η $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{N}$, είναι ακολουθία Cauchy:
Τότε αφού $\forall i = 1, \dots, n$: $\boxed{|x_\nu^{(i)} - x_\mu^{(i)}| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\|}$ (*)
προκύπτει ότι: $\forall i = 1, \dots, n$ οι (πραγμ.) ακολ. $(x_\nu^{i})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ είναι ακολ. Cauchy. $\Longrightarrow$

(*) $\bar{x} = (x_1^1, \dots, x_n^n)$ $\quad \forall i = 1, \dots, n$: $|x^i| \leq \|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$

$\xrightarrow[\text{του } \mathbb{R}]{\text{πληρότητα}} \forall i = 1, \dots, n : \exists\, x_0^{(i)} \in \mathbb{R} : x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} x_0^{(i)} \overset{(6)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \xrightarrow{\nu \to \infty} (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) =: \bar{x}_0$

⑧ Θεώρημα Bolzano - Weierstrass

Κάθε φραγμένη ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ [δηλ. $\exists\, c>0$: $\|\bar{x}_\nu\| < c \ \forall \nu \in \mathbb{N}$] έχει (τουλ. μία) συγκλίνουσα υπακολουθία $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$

Απόδ. [Χρησιμοποιούμε (πάλι) BW στον $\mathbb{R}$]

Αφού $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένη, $\exists\, c>0: \|\bar{x}_\nu\| \leq c \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \forall i=1,\dots,n: |x_\nu^{(i)}| \leq \|\bar{x}_\nu\| \leq c$ δηλ. η $(x_\nu^{(i)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και άρα από BW στον $\mathbb{R}$, $\forall i=1,\dots,n$: $\exists\, (x^{(i)}_{k_\nu^{(i)}})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset (x_\nu^{(i)}) \subset \mathbb{R}$ που συγκλίνει.

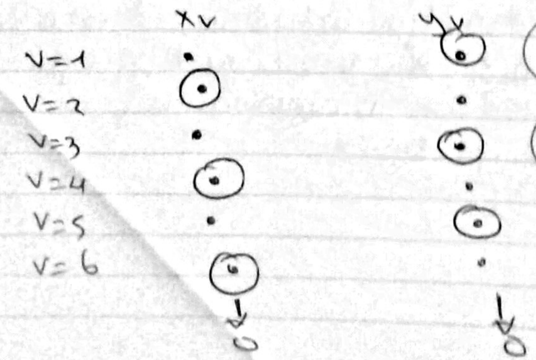
Αυτό ισχύει, αλλά δεν είναι αυτό που λέει το ⑧

[αφού οι υπακολουθίες δεικτών $k_\nu^{(i)} \subset \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}$, δεν ταυτίζεται απαραίτητα για όλα τα $i=1,\dots,n$]

Δηλ. αν $(x_\nu, y_\nu) \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένη $\Rightarrow (x_\nu) \subset \mathbb{R}$ και $(y_\nu) \subset \mathbb{R}$ φραγμένες $\underset{\text{BW στον } \mathbb{R}}{\Rightarrow} \exists\, (k_\nu) \subset (\nu): x_{k_\nu} \to x_0$

και: $\exists\, (l_\nu) \subset (\nu): y_{l_\nu} \to y_0$ όπου π.χ.

$k_\nu = 2\nu$ και $l_\nu = 2\nu+1$



Αυτό που θέλουμε είναι να βρούμε μία κοινή υπακολ. δεικτών $(m_\nu) \subset \nu$ έτσι ώστε: $x_{m_\nu} \to x_0$ και $y_{m_\nu} \to x_0$

→

Λύση: Επιλέγω (με BW στον $\mathbb{R}$) μία υπακολ. $(x^{(1)}_{k_\nu}) \subset (x^{(1)}_\nu) \subset \mathbb{R}$, η οποία συγκλίνει. Θεωρώ

την αντίστοιχη υπακολ. $(x^{(2)}_{k_\nu}) \subset (x^{(2)}_\nu) \subset \mathbb{R}$ η οποία είναι φραγμένη (ως υπακολ. φραγμένης) και άρα (με BW στον $\mathbb{R}$), έχει υπακ. $(x^{(2)}_{k_{\ell_\nu}}) \subset (x^{(2)}_{k_\nu}) \subset (x^{(2)}_\nu)$ η οποία συγκλίνει.

Αφού $(k_{\ell_\nu}) \subset (k_\nu) \subset (\nu)$ και η $(x^{(1)}_{k_\nu})$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $(x^{(1)}_{k_{\ell_\nu}})$ (ως υπακολ. συγκλ. ακολ.)

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{(1)}_{k_{\ell_\nu}} \to x_0^{(1)} \\ x^{(2)}_{k_{\ell_\nu}} \to x_0^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \exists\, (\mu_\nu) \subset (\nu) \text{ με } x^{(1)}_{\mu_\nu} \to x_0^{(1)}, \dots, x^{(n)}_{\mu_\nu} \to x_0^{(n)} \quad \blacksquare$$

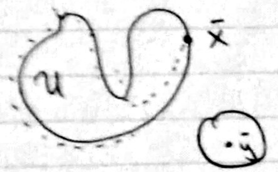
→ Τα όρια των συγκλινουσών υπακολουθιών μιας ακολουθίας, ονομάζονται σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας (στον $\mathbb{R}^n$).
Αυτές είναι οι βασικές ιδιότητες των ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση: Δεν υπάρχουν στον $\mathbb{R}^n$ ιδιότητες ακολουθιών που στηρίζονται στην διάταξη (όπως στον $\mathbb{R}$) [π.χ. $\nexists$ μονότονη + φραγμένη ⇒ συγκλίνουσα]

→ Οι ακολουθίες είναι πολύ χρήσιμες για την κατανόηση της έννοιας της κλειστότητας ενός συνόλου στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση ①: $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε:

$$\bar{x} \in U' \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$$



Αγνιές

Πρόταση ②: $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε:

$$\bar{x} \in \bar{U} \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$$

ΣΟΣ

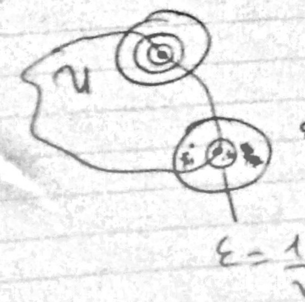
Πρόταση ③: $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in U$

Πρόταση ④: $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U,\ \exists (\bar{x}_{k_\nu})$

(συμπαγές = κλειστό και φραγμένο)

και $\bar{x} \in U : \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$

Αποδ. Προτ. ①: ($\Rightarrow$): Έστω $\bar{x} \in U' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 :$ $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\}$ με $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu} \Rightarrow \bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} \bar{x}$



($\Leftarrow$) Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$

$\varepsilon = \frac{1}{\nu}$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 : \|\bar{x}_{\nu_0} - \bar{x}\| < \varepsilon$

$\xRightarrow{\bar{x}_{\nu_0}} U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

→